

ТЕХНОЛОГИЯ И ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ И СЫРЬЯ

Научная статья

УДК 677.017.4:531

EDN UACNLF

doi 10.34216/2587-6147-2022-3-57-14-19

Светлана Юрьевна Богачева¹

Александр Викторович Мещеряков²

Татьяна Львовна Гольцева³

^{1,2,3}Российский государственный университет им. А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
Москва, Россия

¹bogacheva-su@rguk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2854-3213>

²mesheryakov-av@rguk.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1655-4027>

³goltseva-tl@rguk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8622-7999>

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАТЯЖЕНИЯ НИТИ НА СИСТЕМЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация. Статья посвящена вопросу определения натяжения идеальной гибкой нити с использованием численных методов. Моделировалось равновесие однородной нерастяжимой тяжелой нити при статическом взаимодействии с системой поверхностей различной формы. В статье приведены результаты аналитического моделирования натяжения нити. В работе были выведены формулы для расчета натяжения в любой точке нити по характерным участкам и нормальному давлению в критических точках. Приведен пример расчета натяжения нити, находящейся на двух гладких цилиндрических поверхностях и шероховатой поверхности конуса, моделирующих некоторые рабочие органы текстильных машин. Определено нормальное давление на участках нити в опасных, в отношении нарушения контакта, точках. После решения всех уравнений и определения их составляющих по найденным точкам участков нити была построена математическая модель натяжения тяжелой нити при статическом равновесии.

Ключевые слова: гибкая однородная нить, равновесие, натяжение, уравнение равновесия, малая стрела провисания, равновесие на гладкой поверхности, равновесие на шероховатой поверхности

Для цитирования: Богачева С. Ю., Мещеряков А. В., Гольцева Т. Л. Аналитическое моделирование натяжения нити на системе поверхностей // Технологии и качество. 2022. № 3(57). С. 14–19. <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2022-3-57-14-19>.

Original article

Svetlana Yu. Bogacheva¹

Aleksandr V. Meshcheryakov²

Tatiana L. Gol'ceva³

^{1,2,3}Kosygin Russian State University (Technologies. Design. Art), Moscow, Russia

ANALYTICAL MODELLING OF THREAD TENSION ON A SYSTEM OF SURFACES

Abstract. The paper deals with the determination of the tension of a flexible thread using numerical methods. The equilibrium of a homogeneous inextensible heavy thread, when statically interacting with a system of surfaces of various shapes, has been simulated. The paper presents the results of analytical modelling of thread tension. The formulas for calculating the tension at any point of thread by characteristic sections and the normal pressure at critical points have been derived. An example of calculation of thread tension on two smooth cylindrical surfaces and a rough surface of a cone simulating some working bodies of textile ma-

chines has been given. The normal pressure on the thread sections at the points dangerous, with respect to contact disturbance, has been determined. After solving all the equations and determining their components, a mathematical model of heavy thread tension at static equilibrium has been constructed using the points found.

Keywords: flexible homogeneous thread, equilibrium, tension, equilibrium equation, small slack arrow, equilibrium on smooth surface, equilibrium on rough surface

For citation: Bogacheva S. Yu., Meshcheryakov A. V., Gol'ceva T. L. Analytical modelling of thread tension on a system of surfaces. *Technologies & Quality*. 2022. Nr 3(57). P.14–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2022-3-57-14-19>.

В текстильной технике и технологии широко применяются механизмы, в которых нить огибает гладкие или шероховатые поверхности различной формы. На практике особый интерес представляет исследование равновесия гибкой нити в поле сил тяжести [1, с. 30]. В работе рассматривалось равновесие однородной нерастяжимой нити погонным весом q , Н/м, охватывающей две гладкие цилиндрические поверхности 1 и 2 и шероховатую поверхность кругового конуса 3 по окружностям, плоскости которых перпендикулярны горизонтальным осям соответствующих цилиндров и конуса (рис. 1). Расстояния между осями шкивов l_1 , l_2 , радиусы шкивов r . На горизонтальных свободных пролетах нить имеет малую стрелу провисания. Коэффициент трения на поверхности шкива 2 равен k , поверхность остальных гладкая.

Задача решалась методом припасовывания решений, рассматривалось равновесие нити на отдельных сопряженных участках. Задача представляла собой совокупность трех задач: 1) моделирование равновесия нити на гладкой поверхности 1; 2) моделирование равновесия нити на шероховатой цилиндрической 2 или

конической 3 поверхности; 3) моделирование равновесия нити с малой стрелой провисания (см. рис. 1). Сначала рассматривалось равновесие тяжелой нити на гладкой цилиндрической поверхности 1 (рис. 2).

Дифференциальные уравнения равновесия нити в проекциях на оси естественного трехгранника составлены при условии, что нить расположена по геодезической кривой цилиндрической поверхности и угол геодезического отклонения $\theta = 0$, а радиус кривизны нити $\rho = r = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} + q \cos \varphi &= 0; \\ \frac{T}{r} - q \sin \varphi - N &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где T – натяжение нити в точке, Н;
 s , φ – дуговая и угловая координаты точки нити, соответственно, м;
 r – радиус шкива, м;
 N – нормальное давление (реакция поверхности), Н.

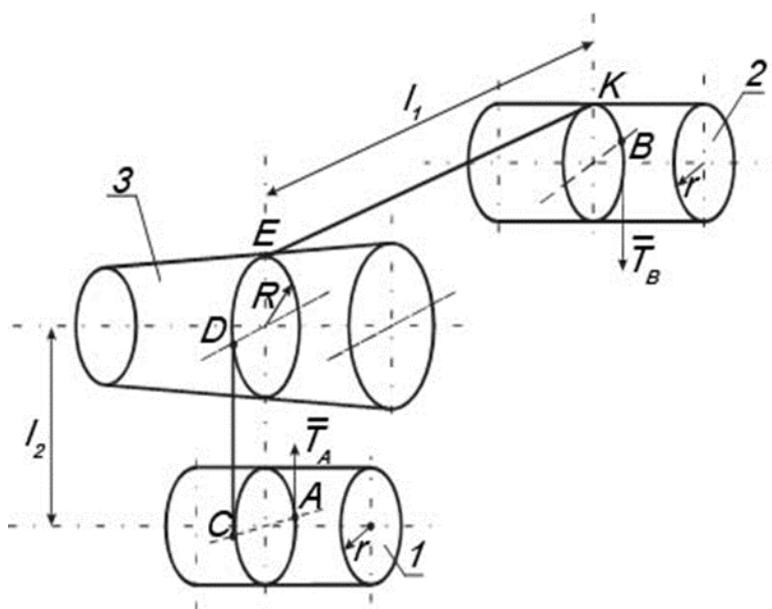


Рис. 1. Равновесие тяжелой нити на системе поверхностей:
 1, 2 – цилиндрические поверхности; 3 – коническая поверхность

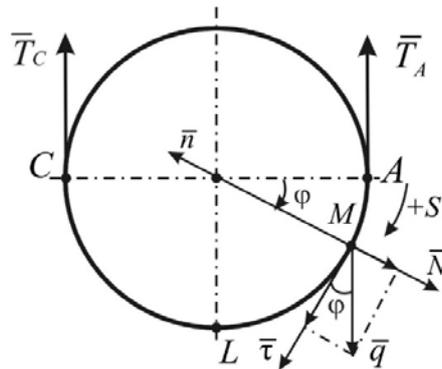


Рис. 2. Равновесие тяжелой нити на гладкой цилиндрической поверхности 1:
 \bar{q} – погонный вес нити; \bar{N} – нормальное давление поверхности; $\bar{\tau}$, \bar{n} – оси естественного трехгранника;
 S – дуговая координата точки; \bar{T}_A – начальное натяжение нити в точке A

Решая систему уравнений равновесия, получен закон распределения натяжения нити на участке AC :

$$T = T_A - qr \sin \varphi; \quad (2)$$

$$T_C = T_A - qr \sin \varphi_C. \quad (3)$$

Как видно из уравнения (2), натяжение нити может стать отрицательным, что может привести к нарушению технологического процесса. Самой опасной точкой в этом отношении является точка L (см. рис. 2), где

$$\varphi = \varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

и натяжение имеет минимальное значение [2, с. 68]. Нормальное давление в нижней точке нити

$$N_L = \frac{T_A}{r} - 2q.$$

Чтобы натяжение в точке L было неотрицательным, должно выполняться условие выбора натяжения в точке A :

$$T_A \geq qr.$$

Затем рассмотрено равновесие вертикального отрезка CD нити длиной l_2 (см. рис. 1). Вес

единицы длины нити \bar{q} , натяжение на концах нити соответственно \bar{T}_C и \bar{T}_D .

Дифференциальное уравнение равновесия нити в проекции на ось Cx , направленную по CD вертикально вверх:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) - q = 0. \quad (4)$$

Закон распределения натяжения вдоль нити CD .

$$T = T_A + qx. \quad (5)$$

Натяжение нити в точке D получим, положив в уравнении (3) $T = T_D$ при $x = l_2$:

$$T_D = T_A + q l_2, \quad (6)$$

$$T_D \geq 2 q r + q l_2,$$

Затем рассмотрено равновесие тяжелой нити на шероховатой поверхности цилиндра 2 и определена зависимость натяжения нити в точке K от натяжения в точке B (рис. 3).

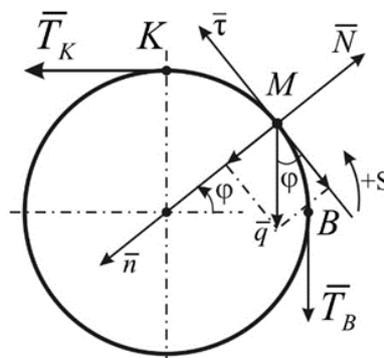


Рис. 3. Равновесие тяжелой нити на шероховатой цилиндрической поверхности 2:
 \bar{q} – погонный вес нити; \bar{N} – нормальное давление поверхности; $\bar{\tau}$, \bar{n} – оси естественного трехгранника;
 S – дуговая координата точки; \bar{T}_B – начальное натяжение нити в точке B ; \bar{T}_K – натяжение нити в точке K

Дифференциальные уравнения равновесия нити на цилиндре 2 в проекциях на оси натурального трехгранника [3, с. 45] определяются аналогично по формуле (1).

Закон изменения натяжения на участке *BK* нити:

$$T = T_B + qr \sin\varphi. \tag{7}$$

Натяжение нити в точке *K*

$$T_K = T_B + qr \sin \frac{\pi}{2} = T_B + qr. \tag{8}$$

На следующем этапе рассмотрено равновесие тяжелой однородной нити с малой стрелой провисания на пролете $EK = l_1$. Точки опор *E* и *K* находятся на одном уровне (превышение между опорами $h = 0$) (см. рис. 1).

Натяжение нити с малой стрелой провисания *f* определится формулой

$$T = q(a + f - y), \tag{9}$$

где *T* – натяжение нити в соответствующей точке, Н;

q – погонный вес нити, Н/м;

a – параметр зависящий от расположения и веса нити, м;

f – стрела провисания нити на соответствующем участке, м;

h – превышение опор на участке нити, м.

Натяжение нити в точках *E* и *K* можно вычислить по формулам:

$$T_K = q(a + f);$$

$$T_E = q(a + f),$$

следовательно,

$$T_E = T_K = T_B + qr. \tag{11}$$

На заключительном этапе моделирования рассмотрено равновесие нити на шероховатой поверхности кругового конуса (рис. 4). Нить охватывает конус по окружности радиуса *R*, плоскость которой перпендикулярна оси конуса O_1O_2 . Главная нормаль \bar{v} к нити проходит через центр O_1 окружности ($\bar{v} \perp O_1O_2$). Бинормаль \bar{g} перпендикулярна плоскости $(\bar{\tau}, \bar{n})$ и направлена по образующей *OM* к вершине конуса.

Главная нормаль \bar{n} к поверхности в точке *M* перпендикулярна образующей *OM* конуса ($\bar{n} \perp OM$). Следовательно, угол геодезического отклонения θ (угол между нормальми \bar{v} и \bar{n}) равен углу α наклона образующей *OM* к оси конуса O_1O_2 , то есть $\theta = \alpha$.

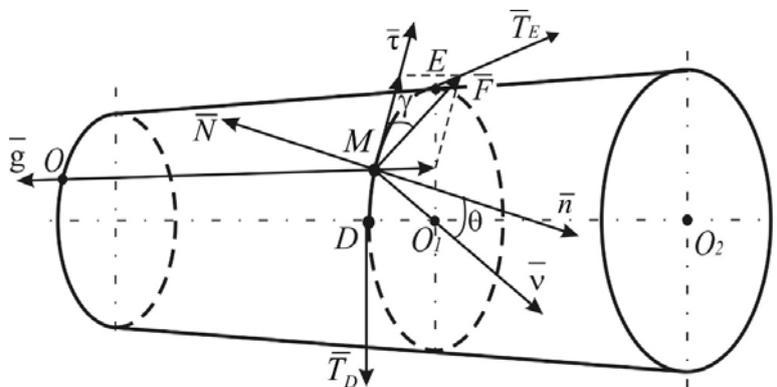


Рис. 4. Равновесие нити на конической поверхности:

\bar{N} – нормальное давление поверхности; $\bar{\tau}, \bar{n}$ – оси естественного трехгранника к поверхности;

$\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{g}$ – оси естественного трехгранника к нити;

\bar{T}_D – начальное натяжение нити в точке *D*; \bar{T}_E – натяжение нити в точке *E*

Приняли $T_E < T_D$. Радиус кривизны ρ нити равен радиусу *R* окружности, по которой нить охватывает конус, $\rho = R = \text{const}$ [4, с. 157]. Дли-

на нити, лежащей на конусе равна $L = R\varphi = \frac{\pi R}{2}$.

Весом нити на конусе пренебрегаем. Таким образом, в точке *M* приложены реакции поверхно-

сти: нормальное давление \bar{N} , направленное по главной нормали \bar{n} , и сила трения \bar{F} , которая расположена в касательной плоскости $(\bar{\tau}, \bar{g})$ под углом γ к касательной оси $\bar{\tau}$ и направлена в сторону меньшего натяжения.

Составлены дифференциальные уравнения равновесия нити на шероховатой поверхно-

сти в проекциях на оси естественного трехгранника $M\tau ng$, связанного в точке M с поверхностью [5, с. 212]:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} + F \cos \gamma &= 0; \\ \frac{T}{R} \cos \theta - N &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{T}{R} \sin \theta - F \sin \gamma &= 0; \\ F &\leq kN. \end{aligned}$$

Получено:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} + \frac{kT}{R} \cos \theta \cos \gamma &\geq 0; \\ \frac{T}{R} \sin \theta - \frac{kT}{R} \cos \theta \sin \gamma &\leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &\geq -\frac{\sqrt{k^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}}{R} R d\varphi; \\ \frac{dT}{T} &\geq -\chi d\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

где $\chi = \sqrt{k^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$.

Так как коэффициент χ должен быть вещественным [6, с. 34], то

$$k^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \geq 0,$$

или $k \geq \operatorname{tg} \theta$. (15)

Первое условие равновесия выполнено (коэффициент трения больше тангенса угла геодезического отклонения).

Проинтегрировав неравенство (14), получим второе необходимое условие равновесия:

$$\begin{aligned} \int_{T_D}^{T_E} \frac{dT}{T} &\geq -\chi \int_0^{\varphi_E} d\varphi; \\ \ln \frac{T_E}{T_D} &\geq -\chi \varphi_E; \\ T_D > T_E &\geq T_D e^{-\chi \varphi_E}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$T_D > T_E \geq T_D e^{-\int_D^E \chi ds}. \quad (17)$$

Находим

$$T_D > T_E \geq T_D e^{-\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} (\varphi_E)}.$$

Приведем полученные аналитические зависимости и условия для моделирования натяжения нити в характерных точках в зависимости от начального T_A .

Натяжение нити в точке C :

$$T_C = T_A - qr \sin \pi = T_A.$$

Натяжение нити в точке D :

$$T_D = T_A + ql_2.$$

Натяжение нити в точке E :

$$T_D > T_E \geq T_D e^{-\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} (\varphi_E)}.$$

Натяжение нити в точке K :

$$T_K = T_B + qr.$$

Окончательное натяжение в точке B рассмотренной нити на всей системе поверхностей подчиняется условию при заданном начальном натяжении в точке A :

$$\begin{aligned} T_A + q(l_2 - r) &> T_B \geq \\ &\geq (T_A + ql_2) e^{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \varphi_E} - qr. \end{aligned} \quad (18)$$

Нормальное давление в нижней точке нити L :

$$N_L = \frac{T_A}{r} - 2q.$$

Определены параметры цепной линии и нити на поверхности рабочих органов при заданных заправочных параметрах. Выведены формулы для расчета натяжения нити в точках по характерным участкам. Наибольшее натяжение нить испытывает в верхних точках нити. Получены аналитические зависимости натяжения в любой точке нити для конкретного участка нити, в зависимости от некоторых свойств контактирующей с нитью поверхности, погонного веса нити и положения в пространстве поверхностей, моделирующих некоторые рабочие органы текстильных машин.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Богачева С. Ю. Метод определения натяжения нити на поверхностях рабочих органов // Фундаментальные и прикладные научные исследования в области инклюзивного дизайна и технологий: опыт, практика и перспективы : сборник научных трудов Международной научно-практической

- конференции (24–26 марта 2021 года) / Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство). М. : РГУ им. А. Н. Косыгина, 2021. С. 29–33.
2. Богачева С. Ю. Аналитическое моделирование натяжения нити на цилиндрических поверхностях // Современные инженерные проблемы ключевых отраслей промышленности. Современные задачи инженерных наук : сборник научных трудов Международного научно-технического симпозиума и III Международного Косыгинского форума (20–21 октября 2021 г.) / Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство). М. : РГУ им. А. Н. Косыгина, 2021. С. 67–70.
 3. Богачева С. Ю. Метод определения натяжения нити // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2020. № 9. С. 44–47.
 4. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М. : Наука, 1980. 240 с.
 5. Богачева С. Ю., Белоусова Е. Г. Определение условий равновесия и натяжения идеальной нити на конической поверхности // 54-я Междунар. науч.-техн. конф. преподавателей и студентов : материалы докл. конф. (28 апреля 2021 года) / Витебский государственный технологический университет : в 2 т. Витебск : ВГТУ, 2021. Т. 1. С. 210–213.
 6. Клочкова Г. М. Применение теории гибкой нити к решению инженерных задач : методические указания. М. : МГТУ им. А. Н. Косыгина, 1993. 75 с.

REFERENCES

1. Bogacheva S. Yu. Thread tension detection method on the surfaces of working bodies // Fundamental and applied scientific research in the field of inclusive design and technology: experience, practice and prospects: a collection of scientific papers of the International Scientific and Practical Conference, March 24–26, 2021, Kosygin Russian State University (Technologies. Design. Art). Moscow, Kosygin Russian St. Univ. Publ., 2021. P. 29–33. (In Russ.)
2. Bogacheva S. Yu. Analytical modeling of thread tension on cylindrical surfaces // Modern engineering problems of key industries. Modern problems of engineering sciences: a collection of scientific papers of the International Scientific and Technical Symposium and the III International Kosygin Forum, October 20–21, 2021, Kosygin Russian State University (Technologies. Design. Art). Moscow, Kosygin Russian St. Univ. Publ., 2021. P. 67–70. (In Russ.)
3. Bogacheva S. Yu. Method for determining thread tension. *Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii* [Automated design in mechanical engineering]. 2020;9:44–47. (In Russ.)
4. Merkin D. R. Introduction to the mechanics of flexible thread. Moscow, Nauka Publ., 1980. 240 p. (In Russ.)
5. Bogacheva S. Yu., Belousova E. G. Determining the conditions of equilibrium and tension of an ideal thread on a conical surface // 54th International Scientific and Technical Conference of Teachers and Students: materials of the conference reports, April 28, 2021. Vitebsk, Vitebskij State tekhnologicheskij University Publ., 2021;1:210–213. (In Russ.)
6. Klochkova G. M. Application of the theory of a flexible thread to solving engineering problems: guidelines. Moscow, Kosygin Russian State University, 1993. 75 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 21.04.2022
Принята к публикации 7.10.2022